Université Claude Bernard – Lyon 1 Année 2015-2016
UE PCSI TMB – L1 – Séquence 5

Test 4 – Sujet B

NOM et PRÉNOM :

La calculatrice est interdite et les téléphones portables doivent être éteints.

Exercice 1

(1) Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son domaine de définition et calculer sa dérivée.

$$\textbf{(a)}\ f(x) = \frac{3x}{x^2 - 6x + 5}, \qquad \textbf{(b)}\ g(y) = \frac{1}{\sqrt{2y-1}}, \qquad \textbf{(c)}\ h(t) = \ln\left(\frac{\sqrt{t^2+1}}{te^{-t}}\right).$$

(2) Résoudre les inéquations suivantes,

$$\textbf{(a)}\ xf(x) < 3, \qquad \textbf{(b)}\ g(x)\tan(\pi x) \geq g(x),$$

où f et g sont les fonctions introduites dans les questions **(1a)** et **(1b)**.

Test 4 – Sujet B

NOM et PRÉNOM (lisibles) :

Résolution des exercices

Test 4 – Sujet B

Corrigé du test

Exercice 2

(1a) La quantité $f(x)$ est définie si et seulement si $x^2-6x+5\neq 0$. Le polynôme x^2-6x+5 a une racine «évidente» $x=1$ et se factorise donc en $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$. Par conséquent, le domaine de définition de f est

$$\boxed{D_f=\mathbb{R}\backslash\{1,5\}}.$$

En utilisant la règle de dérivation d'un quotient on obtient

$$f'(x)=\frac{3(x^2-6x+5)-3x(2x-6)}{(x^2-6x+5)^2}=\frac{-3x^2+15}{(x^2-6x+5)^2}=\boxed{-\frac{3(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{(x-1)^2(x-5)^2}}.$$

(1b) Pour que la quantité $g(y)$ soit définie il faut et il suffit que $2y-1>0$. Par conséquent, le domaine de définition de g est

$$\boxed{D_g=]\frac{1}{2},+\infty[}.$$

En récrivant $g(y)=(2y-1)^{-\frac{1}{2}}$, on obtient

$$g'(y)=-\frac{1}{2}\times 2\times(2y-1)^{-\frac{3}{2}}=\boxed{-\frac{1}{(2y-1)^{\frac{3}{2}}}}.$$

(1c) Puisque pour $t\in\mathbb{R}$, $e^{-t}>0$ et $t^2+1>0$, $h(t)$ est définie si et seulement si $t>0$. Ainsi

$$\boxed{D_h=\mathbb{R}_+^*=]0,+\infty[}.$$

Avant de calculer la dérivée de h on peut simplifier son expression grâce aux propriétés du logarithme. En effet,

$$h(t)=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-\ln(t)+t.$$

Il suit

$$h'(t)=\frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+1}-\frac{1}{t}+1=\frac{t^2-(t^2+1)+t(t^2+1)}{t(t^2+1)}=\boxed{\frac{t^3+t-1}{t(t^2+1)}}$$

(2a)

$$xf(x)<3 \iff \frac{3x^2-3(x^2-6x+5)}{x^2-6x+5}<0 \iff \frac{3(6x-5)}{(x-1)(x-5)}<0$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (qui s'obtient par un tableau de signes) est

$$\boxed{S=]-\infty,5/6[\cup]1,5[}$$

.

(2b) Puisque g est une fonction strictement positive, l'inégalité est équivalente à

$$\begin{cases}\tan(\pi x)\geq 1=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ x\in D_g\end{cases}\iff\begin{cases}\frac{\pi}{2}+k\pi>\pi x\geq\frac{\pi}{4}+k\pi, \text{ pour un certain entier } k\\ x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

ce qui donne comme ensemble de solutions

$$\boxed{S=\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{4}+k,\frac{1}{2}+k\right[}=\left[\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right[\cup\left[\frac{9}{4},\frac{5}{2}\right[\cup\left[\frac{13}{4},\frac{7}{2}\right[\cup\ldots$$